MATLAB в научных исследованиях

Лекция № 4. Интерполяция и аппроксимация

Н. Ю. Золотых

ННГУ, ВМК, сентябрь–декабрь 2008

Содержание

1. Интерполяционный многочлен

x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	y_2	$\ldots$	y_n

$$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$$

$$f(x): \quad f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$f(x) = a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Для любой таблицы интерполяции интерполяционный многочлен степени $< n$ существует и единственен.

Если интерполируемая функция $g(x)$ в некоторой области имеет n непрерывных производных то для любой точки x из этой области погрешность интерполяции равна

$$g(x) - f(x) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \quad \text{где } \xi \in [x_1, x_n].$$

```
f = polyfit(x, y, n - 1)
```

1.1. Пример

Функцию $y = \ln x$ будем интерполировать кубическим полиномом по точкам 0.4, 0.5, 0.7, 0.8.

```
x = [0.4, 0.5, 0.7, 0.8];
y = log(x);
f = polyfit(x, y, 3)
```

Получим:

$$f(x) = 1.6836x^3 - 4.5239x^2 + 5.2760x - 2.4106.$$

Найдем фактическую абсолютную ошибку:

```
polyval(f, 0.6) - log(0.6)
xx = (0.4:0.01:0.8);
norm(polyval(f, xx) - log(xx), Inf)

plot(xx, log(xx), xx, polyval(f, xx))
```

1.2. Пример. Функция Рунге

$$R(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad x \in [-1, 1].$$

см. `runghe.m`

С ростом n удовлетворительные результаты получаются лишь для $x \in [-0.73, 0.73]$. Вне этого отрезка интерполяционный процесс расходится. Попробуем сгустить точки около концов отрезка $[-1, 1]$. В качестве узлов интерполяции возьмем корни полиномо
Чебышева:

$$x = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Кусочно-полиномиальная интерполяция

Функция $f(x)$ называется *кусочно-полиномиальной*, если на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ она представляет собой многочлен

$$f_i(x) = a_{i1}x^k + a_{i1}x^{k-1} + a_{ik}x + a_{i,k+1}.$$

Функция	Интерполяция
`interp1(x,y,xx,'nearest')`	ступенчатая
`interp1(x,y,xx)` `interp1(x,y,xx,'linear')`	кусочно-линейная
`spline(x,y,xx)` `interp1(x,y,xx,'spline')`	кубический сплайн
`pchip(x,y,xx)` `interp1(x,y,xx,'pchip')` `interp1(x,y,xx,'cubic')`	кубический интерполянт

При равномерной сетке x можно использовать более быстрые методы ‘со звездочкой’, например:

```
interp1(x,y,xx,'spline*')
```

cm. `runghe`, `interpshow`, `spoon`

3. 2d интерполяция

```
ZZ = interp2(X, Y, Z, XX, YY, метод)
```

Метод:

- `'nearest'` ступенчатая интерполяция,
- `'linear'` линейная интерполяция (по умолчанию),
- `'spline'` кубический сплайн,
- `'cubic'` бикубическая интерполяция,

3.1. Сравнение методов

```
[X, Y] = meshgrid(-3:1:3);
Z = peaks(X, Y);
surf(X, Y, Z)

[XX, YY] = meshgrid(-3:0.25:3);
ZZ1 = interp2(X, Y, Z, XX, YY, 'nearest');
ZZ2 = interp2(X, Y, Z, XX, YY);
ZZ3 = interp2(X, Y, Z, XX, YY, 'spline');
ZZ4 = interp2(X, Y, Z, XX, YY, 'cubic');
```

```
subplot(2, 2, 1), surf(XX, YY, ZZ1)
subplot(2, 2, 2), surf(XX, YY, ZZ2)
subplot(2, 2, 3), surf(XX, YY, ZZ3)
subplot(2, 2, 4), surf(XX, YY, ZZ4)

subplot(2, 2, 1), contour(XX, YY, ZZ1)
subplot(2, 2, 2), contour(XX, YY, ZZ2)
subplot(2, 2, 3), contour(XX, YY, ZZ3)
subplot(2, 2, 4), contour(XX, YY, ZZ4)
```

Сравним бикубическую интерполяцию и интерполяцию сплайном:

```
contour(XX,YY,ZZ4,10);
hold on
contour(XX,YY,ZZ3,10);
```

4. Линейный метод наименьших квадратов

x_1	x_2	$\ldots$	x_m
y_1	y_2	$\ldots$	y_m

$x_i \neq x_j \quad (i \neq j)$

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x).$$

Необходимо найти $a_1, a_2, \ldots, a_n$, на которых достигается минимум

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 .$$

1. Полиномиальная аппроксимация: $f_j(x) = x^{n-j}$
   функция `f = polyfit(x, y, n)`

2. Произвольный линейный метод наименьших квадратов: команда \

4.1. Пример

```
x = (1:10)';  y = 3*x.^2-x+5*randn(10,1);
xx = (1:.1:10)';  yy = 3*xx.^2-xx;
plot(xx, yy, 'k', x, y, '.')
```

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

4.1.1. Первый способ: с помощью функции polyfit

```
f = polyfit(x,y,2)
err = norm(polyval(f,x) - y)
yyf = polyval(f,xx);
plot(xx,yy,'k',xx,yyf,'m',x,y,'.');
```

4.1.2. Второй способ: с помощью команды \

```
A = [x.^2, x, ones(size(x))];
p = A\y
```

5. Пример

$$y = \beta_1 e^{-\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_2 x}$$

имеются данные

$$x_1,\quad y_1$$

$$x_2,\quad y_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_m,\ y_m$$

λ_1, λ_2 известны и надо определить C_1, C_2 — линейная задача наименьших квадратов.

C_1, C_2, λ_1, λ_2 не известны (их надо определеить) — нелинейная задача наименьших квадратов.

Первая задача сводится к нахождению псевдорешения с.л.у. $X\beta = y$, где

$$X = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 x_1} & e^{-\lambda_1 x_1} \\ e^{-\lambda_1 x_2} & e^{-\lambda_1 x_2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ e^{-\lambda_1 x_m} & e^{-\lambda_1 x_m} \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$