Глава 8

Прямые и плоскости

8.1 Прямая на плоскости

8.1.1 Аффинные задачи

В этом разделе система координат аффинная.

1. Указать хотя бы один направляющий вектор прямой, заданной уравнением:
1) $y = kx + b$;
2) $Ax + By + C = 0$.

2. Для прямой, заданной каноническим уравнением $x = 2 - t$, $y = -1 + 3t$, составить ее общее уравнение и найти угловой коэффициент k.

3. Записать параметрическое и каноническое уравнение прямой $2x - 3y + 5 = 0$.

4. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 3)$ и параллельной прямой:
1) $x = 5 - 3t$, $y = -4 + t$;
2) $\dfrac{x+6}{3} = \dfrac{y-4}{-7}$;
3) $3x - 5y + 2 = 0$;
4) $x = -3$;
5) $y = 0$.

5. Записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:
1) $(2, 3)$, $(5, 1)$;
2) $(-2, 5)$, $(-2, 0)$;
3) $(1, -4)$, $(7, -4)$.

6. Установить, совпадают, параллельны или пересекаются две заданные прямые; в последнем случае найти точку пересечения:
1) $2x - 5y - 5 = 0$, $3x - 8y - 7 = 0$;
2) $x - y + 3 = 0$, $3x - 3y + 6 = 0$;
3) $2x - y + 3 = 0$, $2y - 4x - 6 = 0$;
4) (р) $x = 2 - t$, $y = 3 + 2t$ и $x = 3 + t$, $y = -2 - 3t$.

7. (р) Написать уравнение медианы $\mathcal{AM}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(2,-5)$, $\mathcal{B}(3,1)$, $\mathcal{C}(-1,-7)$.

8.1.2 Метрические задачи

В этом разделе система координат декартовая прямоугольная.

8. Указать хотя бы один нормальный вектор для прямой, заданной уравнением
1) $y = kx + b$;
2) $Ax + By + C = 0$.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2,-8)$ и перпендикулярной заданной:
1) $2x - 5y - 2 = 0$;
2) $\dfrac{x+8}{5} = \dfrac{y-7}{2}$;
3) $x = 6$;
4) $y = 0$.

10. (р) Дана точка $\mathcal{M}\,(5,-8)$ и прямая $2x - 3y + 5 = 0$. Найти проекцию $\mathcal{P}$ точки $\mathcal{M}$ на прямую и точку $\mathcal{N}$, симметричную точке $\mathcal{M}\,(5,-8)$ относительно этой прямой.

11. Найти расстояние от точки $(2,\ -1)$ до прямой:
1) $2x - 3y - 2 = 0$;
2) $3x + 4y - 7 = 0$;
3) $x = -5$;
4) $y = 0$.

12. Найти расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.

13. Найти угол между прямыми:
1) $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 4t$ и $x = -7 + t$, $y = 2 - t$;
2) $4x - 3y - 3 = 0$ и $7x + y + 6 = 0$;
3) $4x - 5y - 7 = 0$ и $5x + 4y - 11 = 0$;
4) $x = 1 + 5t$, $y = 6 - 4t$ и $2x + y + 3 = 0$;
5) $x - 3y - 7 = 0$ и $y = 1$.

14. (р) Составить уравнение высоты $\mathcal{AH}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(-11,6)$, $\mathcal{B}(-3,-8)$, $\mathcal{C}(3,1)$. Найти координаты точки пересечения высоты с прямой $\mathcal{BC}$. Определить, внутри или снаружи стороны $\mathcal{BC}$ лежит точка $\mathcal{H}$.

15. (р) Составить уравнение биссектрисы, выходящей из угла $\mathcal{A}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(5,-4)$, $\mathcal{B}(-1,-1)$, $\mathcal{C}(6,-2)$. Найти координаты точки пересечения биссектрисы со стороной $\mathcal{BC}$.

16. (р) Уравнение одной из сторон угла $13x + 6y + 9 = 0$, уравнение биссектрисы $4x + 5y - 13 = 0$. Найти уравнение второй стороны угла. Другая формулировка той же задачи: найти уравнение прямой, симметричной прямой $13x + 6y + 9 = 0$ относительно $4x + 5y - 13 = 0$.

8.2 Плоскость и прямая в пространстве

8.2.1 Аффинные задачи

В этом разделе система координат аффинная

17. (р) Доказать, что координаты (α, β, γ) направляющего вектора прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можно находить по правилу «векторного произведения»

$$\alpha = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

не только в прямоугольной, но и в произвольной аффинной системе координат.

18. По параметрическому уравнению плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + t_1 + 2t_2, \\ y = -2 + 3t_1 + 3t_2, \\ z = 3 - 3t_1 + t_2 \end{cases}$$

составить ее общее уравнение.

19. По общему уравнению плоскости $2x - 5y + 3z + 4 = 0$ составить ее параметрическое уравнение.

20. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} x = \phantom{-2 - {}} 2t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

в каноническом виде и в виде пересечения двух плоскостей.

21. Записать уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z - 2 = 0, \\ x - 2y + 3z - 1 = 0, \end{cases}$$

в каноническом виде и параметрическом виде.

22. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -7)$ и параллельной плоскости:

1) $x = 1 - 3t_1 + 5t_2$, $y = 3 + 4t_1 - 4t_2$, $z = 5 + t_1 - 4t_2$;

2) $-2x - y + z + 5 = 0$;

3) $z = 3$.

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 3, -7)$ и параллельной прямой:

1) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{-1}$;
2) $2x-3y-z-1=0$, $3x-z+2=0$;
3) $x=1$, $y=5$.

24. Записать уравнение прямой, проходящей через точки:
1) $(1,3,-3)$ и $(2,-3,-5)$;
2) $(-4,5,5)$ и $(0,5,-4)$;
3) $(-1,5,-3)$ и $(2,5,-3)$.

25. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки:
1) $(2,-5,4)$, $(5,2,3)$, $(3,-1,2)$;
2) $(-4,3,-2)$, $(-3,-2,-1)$, $(1,1,-1)$;
3) $(4,2,5)$, $(2,-3,1)$, $(0,-8,-3)$.

26. Записать уравнение медианы $\mathcal{AM}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(2,1,9)$, $\mathcal{B}(2,3,-5)$, $\mathcal{C}(-4,-5,9)$.

27. Записать общее уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях $\mathcal{O}x$, $\mathcal{O}y$, $\mathcal{O}z$ в положительном октанте отрезки длиной 2, 3, 7 соответственно.

28. Определить взаимное расположение плоскостей (совпадают, параллельны или пересекаются). В случае, если плоскости пересекаются, записать каноническое уравнение линии пересечения:
1) $3x-5y+7z-8=0$ и $2x-3y+4z-5=0$;
2) $2x-3y+4z-7=0$ и $4x-6y+8z+5=0$;
3) $x-2y+3z-2=0$ и $6y-3x-9z+6=0$;
4) $x=-2t_1+3t_2$, $y=1+t_1+2t_2$, $z=t_1$ и $x=-1+2t_1+2t_2$, $y=6t_2$, $z=1-t_1+t_2$;
5) $x=2+t_1+3t_2$, $y=2+t_1+t_2$, $z=3+t_1-2t_2$ и $x=2+4t_1+2t_2$, $y=2+t_1-t_2$, $z=2-4t_1-4t_2$;
6) $x=1+t_1+2t_2$, $y=2+2t_1+2t_2$, $z=1-5t_1+t_2$ и $x=3+t_1+t_2$, $y=4+2t_2$, $z=2+6t_1-5t_2$.

29. Определить, лежит ли указанная прямая в плоскости $2x-3y+5z-2=0$, параллельна ей или пересекает ее в единственной точке; в последнем случае найти точку пересечения:
1) $\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$;
2) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$;
3) $x+2y+2z-1=0$, $3x-y+7z-3=0$;
4) $x+3y-4z-3=0$, $2x+3y-4z-1=0$;
5) $x=-2+2t$, $y=2-t$, $z=2+t$.

30. Определить взаимное расположение плоскостей (совпадают, параллельны, пересекаются или скрещиваются); если прямые параллельны, то записать общее уравнение плоскости, в которой они лежат; если прямые пересекаются, то найти точку пересечения и записать общее уравнение плоскости, в которой они лежат:

1) $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+5}{4}$ и $\dfrac{x-4}{-3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$;
2) $x=1+t$, $y=2+2t$, $z=-3-4t$ и $x=-1-t$, $y=-1-3t$, $z=4+5t$;
3) $x-2y-3z+1=0$, $2x-4y-5z+2=0$ и $x-2y-4z+7=0$, $x-2y-2z-2=0$;
4) $x=1-t$, $y=1-5t$, $z=2-3t$ и $x=1+5t$, $y=1-4t$, $z=1+4t$;
5) $2x+y-z+1=0$, $3x+2y-2z+3=0$ и $x+2y-z=0$, $x+3y-2z+3=0$.

31. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1,2,-3)$ и параллельной прямым $x+2y-4z+5=0$, $2x+3y-3z-1=0$ и $y-z+4=0$, $x+2y-z+1=0$.

32. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z}{-4}$ и параллельной прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-4}{-5}$.

33. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(2,-1,5)$ и прямую $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-6}{4}$.

34. (р) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-1,-4,5)$ и пересекающую прямые $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+4}{-4}$ и $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-5}$.

35. (р) Составить уравнение прямой, пересекающей прямые $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-3}{-1}$ и $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+1}{-3}$ и параллельной прямой $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+3}{5}$.

36. (р) Составить уравнения плоскостей, проходящих через прямую $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{5}$ и равноудаленных от точек $\mathcal{A}(3,-1,4)$ и $\mathcal{B}(1,3,-2)$.

8.2.2 Метрические задачи

В задачах данного раздела предполагается, что система координат прямоугольная.

37. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(1,2,3)$ и перпендикулярной плоскости:
1) $2x-3y+5z+2=0$;
2) $2x-z+3=0$;
3) $x=5$.

38. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1,-2,2)$ и перпендикулярной прямой:
1) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+3}{4}$;
2) $2x+4y-5z-7=0$, $x+y-2z-5=0$;
3) $x=3$, $y=0$.

39. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $3x-4y+z+9=0$ и проходящей через прямую:

1) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$;

2) $-x+3y-2z=0$, $x-2y+3z-2=0$;

3) $y=-3$, $z=2$.

40. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек $(2,-3,2)$ и $(4,1,0)$.

41. Найти расстояние от точки $(-2,1,4)$ до плоскости:

1) $2x-2y+z-3=0$;

2) $x=5$.

42. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

1) $6x-2y+3z-2=0$, $6x-2y+3z+5=0$;

2) $4x-3z-7=0$, $8x-6z+6=0$.

43. Найти расстояние от точки $(-1,-2,4)$ до прямой:

1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-9}{6}$;

2) $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$;

3) $x-2y-z+2=0$, $2y+z+2=0$.

44. Найти расстояние между прямыми:

1) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$ и $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) $x+y-2z-3=0$, $2x-y-z=0$ и $2x-3y-14=0$, $z=3$;

3) $x-3y+z+3=0$, $3x+y-3z+3=0$ и $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{5}$.

45. Найти угол между прямыми:

1) $x=1+2t$, $y=-2+2t$, $z=-5-t$ и $x=-8+t$, $y=1-t$, $z=-2+t$;

2) $x-2y-2z-7=0$, $x+3y+z+3=0$ и $x+y+z-3=0$, $x+3y-z+5=0$;

3) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-4}{8}$ и $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z-9}{-3}$;

4) $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ и $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-8}{4}$.

46. Найти угол между плоскостями:

1) $3x+3y+2z-9=0$ и $-x+3y+15=0$;

2) $x=2+3t_1+5t_2$, $y=3-3t_1-3t_2$, $z=-7+t_1-t_2$ и $x=3t_1+7t_2$, $y=-4+t_1-t_2$, $z=5+t_1+t_2$;

3) $x+6y-8z+9=0$ и $2x+y+z+2=0$;

4) $3x+3y-z-9=0$ и $9x+9y-3z+1=0$.

47. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+7}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$ и плоскостью:

1) $2x+4y-5z-7=0$;

2) $4x - 4y + 2z + 9 = 0$;
3) $2x + y - 2z - 4 = 0$.

48. Составить уравнение высоты $\mathcal{AH}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(2,2,7)$, $\mathcal{B}(3,10,-1)$, $\mathcal{C}(-1,-2,3)$. Найти координаты точки пересечения высоты с прямой $\mathcal{BC}$. Определить, внутри или снаружи стороны $\mathcal{BC}$ лежит точка $\mathcal{H}$.

49. Составить уравнение биссектрисы, проведенной из вершины $\mathcal{A}$ треугольника $\mathcal{ABC}$, если $\mathcal{A}(-3,-2,5)$, $\mathcal{B}(3,0,1)$, $\mathcal{C}(-2,0,2)$. Найти координаты точки пересечения биссектрисы с прямой $\mathcal{BC}$.

Контрольная работа

Даны точки $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

а) Составить уравнение прямой $\mathcal{AB}$;

б) Спроецировать точку $\mathcal{C}$ на прямую $\mathcal{AB}$;

в) Составить уравнение высоты треугольника $\mathcal{ABC}$, выходящей из вершины $\mathcal{C}$;

г) Найти расстояние от точки $\mathcal{C}$ до прямой $\mathcal{AB}$;

д) Составить уравнение медианы треугольника $\mathcal{ABC}$, выходящей из вершины $\mathcal{C}$;

е) Составить уравнение средней линии треугольника $\mathcal{ABC}$, параллельной основанию $\mathcal{AB}$;

ж) Треугольник $\mathcal{ABC}$ дополнен до параллелограмма $\mathcal{ABCD}$. Найти координаты точки $\mathcal{D}$;

з) Найти координаты проекции начала координат на треугольник $\mathcal{ABC}$. Лежит ли эта точка внутри треугольника $\mathcal{ABC}$?

1. $\mathcal{A}\,(-1,0,-2)$, $\mathcal{B}\,(7,-12,10)$, $\mathcal{C}\,(-7,-11,13)$;
2. $\mathcal{A}\,(2,2,2)$, $\mathcal{B}\,(-10,2,-6)$, $\mathcal{C}\,(-7,3,-4)$;
3. $\mathcal{A}\,(0,-2,2)$, $\mathcal{B}\,(-12,-2,6)$, $\mathcal{C}\,(-9,-4,5)$;
4. $\mathcal{A}\,(0,-1,-1)$, $\mathcal{B}\,(-4,-13,-1)$, $\mathcal{C}\,(-1,-4,0)$;
5. $\mathcal{A}\,(0,1,-1)$, $\mathcal{B}\,(-12,1,-9)$, $\mathcal{C}\,(-9,2,-7)$;
6. $\mathcal{A}\,(-2,0,-2)$, $\mathcal{B}\,(10,-8,-2)$, $\mathcal{C}\,(1,-2,-5)$;
7. $\mathcal{A}\,(1,0,-1)$, $\mathcal{B}\,(1,12,7)$, $\mathcal{C}\,(2,9,5)$;
8. $\mathcal{A}\,(2,2,0)$, $\mathcal{B}\,(-2,14,8)$, $\mathcal{C}\,(-5,5,-1)$;

9. $\mathcal{A}\,(-1,-2,-1)$, $\mathcal{B}\,(-1,10,-13)$, $\mathcal{C}\,(5,3,-2)$;
10. $\mathcal{A}\,(2,2,2)$, $\mathcal{B}\,(-10,2,-6)$, $\mathcal{C}\,(-7,3,-4)$;
11. $\mathcal{A}\,(0,0,-1)$, $\mathcal{B}\,(-4,-8,-13)$, $\mathcal{C}\,(9,-3,-16)$;
12. $\mathcal{A}\,(2,2,-1)$, $\mathcal{B}\,(2,6,-9)$, $\mathcal{C}\,(-1,3,-3)$;
13. $\mathcal{A}\,(-2,-2,-1)$, $\mathcal{B}\,(-14,-14,11)$, $\mathcal{C}\,(-15,-5,10)$;
14. $\mathcal{A}\,(-2,1,-2)$, $\mathcal{B}\,(-10,-7,-6)$, $\mathcal{C}\,(-14,-2,1)$;
15. $\mathcal{A}\,(2,-2,-1)$, $\mathcal{B}\,(6,6,-9)$, $\mathcal{C}\,(7,5,-5)$;
16. $\mathcal{A}\,(2,-2,0)$, $\mathcal{B}\,(10,2,12)$, $\mathcal{C}\,(10,-4,0)$;
17. $\mathcal{A}\,(-2,-2,0)$, $\mathcal{B}\,(2,-10,-4)$, $\mathcal{C}\,(1,-10,1)$;
18. $\mathcal{A}\,(0,-2,2)$, $\mathcal{B}\,(-8,-10,-6)$, $\mathcal{C}\,(1,-1,-6)$;
19. $\mathcal{A}\,(-1,-2,-2)$, $\mathcal{B}\,(3,-6,6)$, $\mathcal{C}\,(-2,-5,0)$;
20. $\mathcal{A}\,(0,1,2)$, $\mathcal{B}\,(0,-7,-6)$, $\mathcal{C}\,(-6,2,-3)$;
21. $\mathcal{A}\,(2,-1,-2)$, $\mathcal{B}\,(14,-13,-2)$, $\mathcal{C}\,(14,-7,7)$;
22. $\mathcal{A}\,(-2,0,1)$, $\mathcal{B}\,(-14,12,1)$, $\mathcal{C}\,(-11,9,-2)$;
23. $\mathcal{A}\,(0,-2,1)$, $\mathcal{B}\,(12,2,5)$, $\mathcal{C}\,(2,3,1)$;
24. $\mathcal{A}\,(1,-2,-2)$, $\mathcal{B}\,(5,-10,-6)$, $\mathcal{C}\,(0,-3,-7)$;
25. $\mathcal{A}\,(-1,-1,0)$, $\mathcal{B}\,(7,-9,8)$, $\mathcal{C}\,(-2,-9,-1)$;
26. $\mathcal{A}\,(0,-1,2)$, $\mathcal{B}\,(-8,-9,-2)$, $\mathcal{C}\,(-3,-13,5)$;
27. $\mathcal{A}\,(2,-2,1)$, $\mathcal{B}\,(-2,-10,13)$, $\mathcal{C}\,(1,-9,10)$;
28. $\mathcal{A}\,(1,-1,0)$, $\mathcal{B}\,(-11,11,12)$, $\mathcal{C}\,(-11,7,7)$;
29. $\mathcal{A}\,(2,1,-2)$, $\mathcal{B}\,(-6,-3,10)$, $\mathcal{C}\,(0,6,3)$;
30. $\mathcal{A}\,(-2,1,-1)$, $\mathcal{B}\,(-6,-11,7)$, $\mathcal{C}\,(-4,-9,4)$;
31. $\mathcal{A}\,(2,0,1)$, $\mathcal{B}\,(-10,4,5)$, $\mathcal{C}\,(-3,-1,-2)$;
32. $\mathcal{A}\,(-1,1,-2)$, $\mathcal{B}\,(-1,-7,2)$, $\mathcal{C}\,(1,-2,-3)$;
33. $\mathcal{A}\,(-2,2,-1)$, $\mathcal{B}\,(-2,6,3)$, $\mathcal{C}\,(-3,5,2)$;
34. $\mathcal{A}\,(2,2,-2)$, $\mathcal{B}\,(2,-2,2)$, $\mathcal{C}\,(4,-1,-3)$;

35. $\mathcal{A}\,(0,2,2)$, $\mathcal{B}\,(0,6,10)$, $\mathcal{C}\,(-2,1,5)$;
36. $\mathcal{A}\,(2,-2,0)$, $\mathcal{B}\,(14,-14,12)$, $\mathcal{C}\,(1,-6,6)$;
37. $\mathcal{A}\,(-1,2,-1)$, $\mathcal{B}\,(-5,14,-5)$, $\mathcal{C}\,(-4,5,0)$;
38. $\mathcal{A}\,(2,2,2)$, $\mathcal{B}\,(-2,6,-2)$, $\mathcal{C}\,(1,4,2)$;
39. $\mathcal{A}\,(-2,1,2)$, $\mathcal{B}\,(10,1,-10)$, $\mathcal{C}\,(-1,7,-3)$.

2. Даны две прямые

а) Доказать, что прямые скрещиваются;

б) составить каноническое уравнение их общего перепендикуляра;

в) найти точки пересечения общего перепендикуляра с заданными прямыми;

г) найти расстояние между прямыми (двумя способами).

1. $x = 8 + 3t$, $y = 26 + 24t$, $z = 7 + 2t$ и $x = -11 + 12t$, $y = -3 + 6t$, $z = 6 - 7t$;
2. $x = 7 + 3t$, $y = -4 - 2t$, $z = -4 - 2t$ и $x = 1 + t$, $y = -5 + t$, $z = 1 - 4t$;
3. $x = 2 + 2t$, $y = 4 + 7t$, $z = -4 - t$ и $x = -11 + 8t$, $y = 7 - 8t$, $z = 5t$;
4. $x = 1 + 2t$, $y = 4 + t$, $z = -2t$ и $x = t$, $y = 2 + t$, $z = 5 - t$;
5. $x = 4$, $y = 5 + t$, $z = -2 + t$ и $x = 4t$, $y = 4 - t$, $z = -1 - t$;
6. $x = -3 + t$, $y = -3 + t$, $z = -7 - 2t$ и $x = -6 + 3t$, $y = -2 - t$, $z = -2 - 2t$;
7. $x = -3$, $y = -5$, $z = 5 + t$ и $x = -1 + t$, $y = -1 - t$, $z = 4$;
8. $x = 6 + 11t$, $y = -7 - 7t$, $z = -3 + t$ и $x = -14 + 12t$, $y = 15 - 10t$, $z = -9 + 7t$;
9. $x = -2 + t$, $y = -1$, $z = 6 + t$ и $x = -9 + 13t$, $y = 19 - 21t$, $z = -18 + 16t$;
10. $x = 13 + 14t$, $y = -19 - 16t$, $z = 4 - t$ и $x = -4$, $y = -10 + 5t$, $z = -4 - t$;
11. $x = -3 + t$, $y = -6 - 2t$, $z = 1 - 2t$ и $x = -16 + 14t$, $y = 25 - 22t$, $z = 18 - 21t$;
12. $x = 13 + 13t$, $y = 6 + 3t$, $z = -20 - 22t$ и $x = 3 + 2t$, $y = -4$, $z = 9 - 5t$;
13. $x = 7 + 4t$, $y = -10 - 11t$, $z = 11 + 14t$ и $x = -6 + 4t$, $y = -4 + 7t$, $z = -2 + 2t$;
14. $x = 6 + 4t$, $y = 9 + 7t$, $z = 1 + 2t$ и $x = -9 + 7t$, $y = -7 + 11t$, $z = -6 + 6t$;
15. $x = 12 + 11t$, $y = 2 + 4t$, $z = 9 + 8t$ и $x = -10 + 7t$, $y = -5 + 8t$, $z = 8 - 4t$;
16. $x = -4$, $y = 4 + 3t$, $z = 4 + 2t$ и $x = -3 + 7t$, $y = 1 + 4t$, $z = -16 + 12t$;

17. $x = -3 + t$, $y = 4$, $z = 6 + t$ и $x = -2$, $y = 3 + t$, $z = 3$;
18. $x = 1 + 2t$, $y = 3 + 4t$, $z = 6 + 5t$ и $x = -6 + 2t$, $y = 10 - 12t$, $z = 6 - 3t$;
19. $x = -1 + 4t$, $y = 8 + 9t$, $z = -8 - 5t$ и $x = 1 + 2t$, $y = -7 + 3t$, $z = 5 - 7t$;
20. $x = 4 + 2t$, $y = 4 + 4t$, $z = 3t$ и $x = -2 + t$, $y = 3t$, $z = -8 + 3t$;
21. $x = 4 + t$, $y = 8 + 3t$, $z = -1 + 2t$ и $x = -6 + 9t$, $y = -3 + 6t$, $z = -4 + 4t$;
22. $x = 3 + 8t$, $y = 8 + 6t$, $z = 21 + 17t$ и $x = 4 + t$, $y = 3 - 3t$, $z = -4 + 4t$;
23. $x = 14 + 12t$, $y = -5 - 4t$, $z = -12 - 15t$ и $x = -11 + 7t$, $y = 2 - 6t$, $z = 5 - 6t$;
24. $x = 6 + t$, $y = -4 + t$, $z = -5 - t$ и $x = -5 + t$, $y = 3 + t$, $z = -2 - 2t$;
25. $x = 6 + 2t$, $y = -27 - 27t$, $z = 22 + 20t$ и $x = -13 + 13t$, $y = -1 - 3t$, $z = 5 - 8t$;
26. $x = 8 + 5t$, $y = 12 + 12t$, $z = 11 + 8t$ и $x = -6 + 5t$, $y = 9 - 4t$, $z = 6 - 8t$;
27. $x = -4 + t$, $y = -4 - t$, $z = 0$ и $x = -5 + 7t$, $y = 15 - 11t$, $z = 12 - 14t$;
28. $x = 10 + 11t$, $y = 17 + 12t$, $z = 22 + 21t$ и $x = -23 + 22t$, $y = -6 + 4t$, $z = -2 + 7t$;
29. $x = -4 + t$, $y = 6 + 2t$, $z = 3 - t$ и $x = -5 + t$, $y = 6 - 3t$, $z = -1 + 4t$;
30. $x = 3 + t$, $y = -4 + t$, $z = -5 - t$ и $x = -14 + 15t$, $y = -5 + 8t$, $z = 10 - 7t$.

3. Найти уравнение биссектрисы $\mathcal{AD}$ треугольника $\mathcal{ABC}$ и координаты точки $\mathcal{D}$.

1. $\mathcal{A}(-4, 2, 4)$, $\mathcal{B}(-3, 1, 7)$, $\mathcal{C}(-1, -7, 1)$;
2. $\mathcal{A}(-3, -4, -2)$, $\mathcal{B}(-6, -7, 0)$, $\mathcal{C}(-15, -12, -14)$;
3. $\mathcal{A}(3, -2, 0)$, $\mathcal{B}(4, -1, 2)$, $\mathcal{C}(6, -8, 3)$;
4. $\mathcal{A}(-2, -4, -4)$, $\mathcal{B}(-2, -2, -5)$, $\mathcal{C}(2, -4, -6)$;
5. $\mathcal{A}(4, -3, -2)$, $\mathcal{B}(5, -1, 0)$, $\mathcal{C}(12, -7, 6)$;
6. $\mathcal{A}(-1, 0, -3)$, $\mathcal{B}(1, 3, -4)$, $\mathcal{C}(5, 3, 6)$;
7. $\mathcal{A}(1, 1, -3)$, $\mathcal{B}(2, 4, -5)$, $\mathcal{C}(4, 7, 6)$;
8. $\mathcal{A}(0, 1, 3)$, $\mathcal{B}(3, -1, 0)$, $\mathcal{C}(6, 7, -1)$;
9. $\mathcal{A}(-2, -1, -2)$, $\mathcal{B}(-1, -1, -4)$, $\mathcal{C}(2, 7, -2)$;
10. $\mathcal{A}(4, 1, 2)$, $\mathcal{B}(2, 0, 5)$, $\mathcal{C}(0, 9, 14)$;

11. $\mathcal{A}(2,-3,-3)$, $\mathcal{B}(4,-3,-5)$, $\mathcal{C}(-4,-9,-3)$;
12. $\mathcal{A}(-3,4,-1)$, $\mathcal{B}(-3,1,-3)$, $\mathcal{C}(-12,4,-7)$;
13. $\mathcal{A}(3,0,-2)$, $\mathcal{B}(4,3,0)$, $\mathcal{C}(5,-4,4)$;
14. $\mathcal{A}(1,3,-4)$, $\mathcal{B}(-2,2,-3)$, $\mathcal{C}(5,15,-8)$;
15. $\mathcal{A}(-1,0,-3)$, $\mathcal{B}(-2,0,-1)$, $\mathcal{C}(-5,-8,-3)$;
16. $\mathcal{A}(0,3,1)$, $\mathcal{B}(-3,1,0)$, $\mathcal{C}(-8,7,-11)$;
17. $\mathcal{A}(-2,-1,-3)$, $\mathcal{B}(1,-1,-4)$, $\mathcal{C}(-2,2,6)$;
18. $\mathcal{A}(-1,-2,2)$, $\mathcal{B}(-2,-1,4)$, $\mathcal{C}(-5,-10,6)$;
19. $\mathcal{A}(-2,-3,-1)$, $\mathcal{B}(-1,-5,-4)$, $\mathcal{C}(-10,9,3)$;
20. $\mathcal{A}(1,-1,3)$, $\mathcal{B}(2,1,4)$, $\mathcal{C}(7,-4,6)$;
21. $\mathcal{A}(-1,-2,1)$, $\mathcal{B}(1,1,4)$, $\mathcal{C}(11,-10,13)$;
22. $\mathcal{A}(-1,-2,-1)$, $\mathcal{B}(0,0,-4)$, $\mathcal{C}(2,7,5)$;
23. $\mathcal{A}(-1,-1,-1)$, $\mathcal{B}(-2,2,-2)$, $\mathcal{C}(8,2,-4)$;
24. $\mathcal{A}(-2,-2,4)$, $\mathcal{B}(-5,0,2)$, $\mathcal{C}(6,6,-8)$;
25. $\mathcal{A}(-3,1,3)$, $\mathcal{B}(-4,-2,1)$, $\mathcal{C}(-7,9,-9)$;
26. $\mathcal{A}(3,2,-4)$, $\mathcal{B}(1,2,-7)$, $\mathcal{C}(-9,10,-4)$;
27. $\mathcal{A}(-2,1,4)$, $\mathcal{B}(0,-2,2)$, $\mathcal{C}(-11,-5,-2)$;
28. $\mathcal{A}(-3,-2,-3)$, $\mathcal{B}(-4,-4,-4)$, $\mathcal{C}(-11,2,-7)$;
29. $\mathcal{A}(0,-3,-3)$, $\mathcal{B}(-1,0,-3)$, $\mathcal{C}(6,-3,-5)$;
30. $\mathcal{A}(0,3,4)$, $\mathcal{B}(2,1,4)$, $\mathcal{C}(0,-1,0)$;
31. $\mathcal{A}(-2,4,-4)$, $\mathcal{B}(1,6,-4)$, $\mathcal{C}(4,4,5)$;
32. $\mathcal{A}(2,4,3)$, $\mathcal{B}(4,7,6)$, $\mathcal{C}(14,-4,15)$;
33. $\mathcal{A}(-1,4,2)$, $\mathcal{B}(1,5,-1)$, $\mathcal{C}(2,13,8)$;
34. $\mathcal{A}(0,0,4)$, $\mathcal{B}(-3,1,7)$, $\mathcal{C}(2,6,10)$;
35. $\mathcal{A}(-1,2,2)$, $\mathcal{B}(0,2,-1)$, $\mathcal{C}(-1,-1,-7)$.

Ответы, указания, решения

1. 1) $(1, k)$;
2) $(B, -A)$.

2. $3x + y - 5 = 0$, $k = -3$.

3. $x = -1 + 3t$, $y = 1 + 2t$; $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2}$.

4. 1) $x = 2 - 3t$, $y = 3 + t$;
2) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-7}$;
3) $3x - 5y + 9 = 0$;
4) $x = 2$;
5) $y = 3$.

5. 1) $2x + 3y - 13 = 0$;
2) $x = -2$;
3) $y = -4$.

6. 1) пересекаются в точке $(5, 1)$;
2) параллельны;
3) совпадают.
4) Приравниваем выражения для x и y соответственно (обозначив параметры для разных прямых разными буквами):

$$\begin{cases} 2 - \ \ t_1 = \ \ \ 3 + \ \ t_2, \\ 3 + 2t_1 = -2 - 3t_2. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $t_1 = 2$, $t_2 = -3$, поэтому прямые пересекаются. Для нахождения точки пересечения, подставим параметр $t = 2$ в параметрическое уравнение первой прямой. Находим точку пересечения $(0, 7)$.

7. Вначале найдем середину $\mathcal{M}$ стороны $\mathcal{BC}$. Получаем $\mathcal{M}(1, -3)$. Вектор $\overrightarrow{\mathcal{AM}}$ $(-1, 2)$ можно взять в качестве направляющего, поэтому уравнение медианы примет вид $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+5}{2}$.

8. 1) $(k, -1)$;
2) (A, B).

9. 1) $x = 2 + 2t$, $y = -8 - 5t$;
2) $5x + 2y + 6 = 0$;
3) $y = -8$;
4) $x = 2$.

10. Опустим на прямую перпендикуляр из точки $\mathcal{M}\,(5, -8)$. Нормальный вектор прямой $(2,\ -3)$ является направляющим вектором перпендикуляра, поэтому его уравнение можно записать следующим образом

$$\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = -8 - 3t. \end{cases}$$

Проекция $\mathcal{P}$ точки $\mathcal{M}$ есть точка пересечения прямой и перпендикуляра. Для ее нахождения подставим выражения для x и y из уравнения перпендикуляра в уравнение прямой. Получим $2(5 + 2t) - 3(-8 - 3t) + 5 = 0$, откуда $t = -3$. Подставив найденное значение t в параметрическое уравнение перпендикуляра, найдем проекцию $\mathcal{P}\,(-1,\ 1)$. Чтобы найти симметричную точку $\mathcal{N}$, можно воспользоваться формулой деления отрезка пополам. Другой способ заключается в следующем. На перпендикуляре значение $t = 0$ соответствует заданной точке $\mathcal{M}$, значение $t = -3$ — ее проекции $\mathcal{P}$, тогда точке $\mathcal{N}$ на перпендикуляре должно соответствовать значение $t = -6$. Подставляя это значение в параметрическое уравнение прямой, получаем $\mathcal{N}\,(-7,\ 10)$.

11. 1) $5/\sqrt{13}$;
2) 1;
3) 7;
4) 1.

12. $|C_2 - C_1|/\sqrt{A^2 + B^2}$.

13.
1) $\arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$; 2) $\pi/4$;

3) $\pi/2$; 4) $\arcsin\dfrac{6}{\sqrt{205}}$;

5) $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

14. Направляющий вектор высоты перпендикулярен вектору $\overrightarrow{\mathcal{BC}}\ (6, 9)$, поэтому в качестве направляющего вектора можно взять вектор $(3,\ -2)$. Уравнение высоты $\mathcal{AH}$ примет вид $x = -11 + 3t$, $y = 6 - 2t$. Теперь запишем уравнение прямой $\mathcal{BC}$: $x = -3 + 2t$, $y = -8 + 3t$. Найдем точку пересечения прямых $\mathcal{AH}$ и $\mathcal{BC}$. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} -11 + 3t_1 = -3 + 2t_2, \\ 6 - 2t_1 = -8 + 3t_2, \end{cases}$$

решение которой есть $t_1 = 4$, $t_2 = 2$, откуда находим точку пересечения $\mathcal{H}(1, -2)$. Теперь легко проверить, что она лежит внутри отрезка $\mathcal{BC}$ и делит его в отношении $2 : 1$.

15. В качестве направляющего вектора биссектрисы можно выбрать произвольный ненулевой вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{\mathcal{AB}}/|\mathcal{AB}| + \overrightarrow{\mathcal{AC}}/|\mathcal{AC}|$. Имеем $\overrightarrow{\mathcal{AB}}(-6, 3)$, $\overrightarrow{\mathcal{AC}}(1, 2)$. Так как $|\mathcal{AB}| = 3|\mathcal{AC}|$, то в качестве направляющего вектора возьмем $a = \overrightarrow{\mathcal{AB}}/3 + \overrightarrow{\mathcal{AC}}$. Его координаты суть $(-1, 3)$. Теперь запишем уравнение биссектрисы: $x = 5 - t$, $y = -4 + 3t$, и уравнение прямой $\mathcal{BC}$: $x = -1 + 7t$, $y = -1 - t$. Найдем их точку пересечения. Для этого рассматриваем систему

$$\begin{cases} 5 - t_1 = -1 + 7t_2, \\ -4 + 3t_1 = -1 - t_2, \end{cases}$$

решение которой есть $t_1 = t_2 = 3/4$, откуда находим точку пересечения $(17/4, -7/4)$.

16. Решая систему

$$\begin{cases} 13x + 6y + 9 = 0, \\ 4x + 5y - 13 = 0, \end{cases}$$

находим вершину угла $\mathcal{A}(-3, 5)$. Чтобы найти уравнение второй стороны угла, выберем точку на первой стороне, скажем $(3, -8)$, и найдем к ней симметричную относительно заданной биссектрисы $(11, 2)$ (метод решения этой задачи см. в № 10). Осталось записать уравнение прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x+3}{11+3} = \dfrac{y-5}{2-5}$ или $3x - 14y + 61 = 0$.

17. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$. Например, $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = A_1(B_1C_2 - C_1B_2) - B_1(A_1C_2 - C_1A_2) + C_1(A_1B_2 - B_1A_2) = A_1B_1C_2 - A_1C_1B_2 - B_1A_1C_2 + B_1C_1A_2 + C_1A_1B_2 - C_1B_1A_2 = 0$.

18. $11x - 7y - z - 22 = 0$.

19. Например, $x = -2 + t_1 + 3t_2$, $y = t_1$, $z = t_1 - 2t_2$.

20. Например, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{-3}$; $x + y + 2 = 0$, $3x + 2z - 2 = 0$.

21. Например, $x - 1 = \dfrac{y}{11} = \dfrac{z}{7}$; $x = 1 + t$, $y = 11t$, $z = 7t$.

22. 1) $x = 2 - 3t_1 + 5t_2$, $y = 3 + 4t_1 - 4t_2$, $z = -7 + t_1 - 4t_2$;
2) $-2x - y + z + 14 = 0$;
3) $z = -7$.

23. 1) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+7}{-1}$;
2) $2x - 3y - z - 2 = 0$, $3x - z - 13 = 0$;
3) $x = 2$, $y = 3$.

24. 1) $x - 1 = \dfrac{y-3}{-6} = \dfrac{z+3}{-2}$;

2) $9x + 4z + 16 = 0$, $y = 5$;

3) $y = 5$, $z = -3$.

25. 1) $2x - y - z - 5 = 0$;

2) $3x - 4y - 23z - 22 = 0$;

3) точки лежат на одной прямой и не задают плоскость.

26. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-9}{7}$.

27. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{7} = 1$.

28. 1) Плоскости пересекаются. Уравнение линии пересечения: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

2) Плоскости параллельны.

3) Плоскости совпадают.

4) Плоскости пересекаются. Уравнение линии пересечения: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z-1}{5}$.

5) Плоскости пересекаются. Уравнение линии пересечения: $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-8}$.

6) Плоскости совпадают.

29. 1) Прямая лежит в плоскости;

2) прямая параллельна плоскости;

3) прямая лежит в плоскости;

4) пересекаются в точке $(-2, \frac{49}{3}, 11)$;

5) пересекаются в точке $(-\frac{5}{3}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6})$.

30. 1) Прямые совпадают;

2) прямые пересекаются в точке $(-2, -4, 9)$ и лежат в плоскости $2x+y+z-1 = 0$;

3) прямые параллельны и лежат в плоскости $3x - 6y - 8z + 3 = 0$;

4) прямые скрещиваются;

5) прямые пересекаются в точке $(1, 2, 5)$ и лежат в плоскости $y - z + 3 = 0$.

31. $4x + 5y - z - 17 = 0$.

32. $8x - 3y + 5z - 2 = 0$.

33. $x + 6y + 4z - 16 = 0$.

34. Прямую зададим как пересечение двух плоскостей: проходящую через точку

$(-1,-4,5)$ и параллельную прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+4}{-4}$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 14x-3y+2z-8=0,$$

и проходящую через точку $(-1,-4,5)$ и параллельную прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-5}$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z-5 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = x+y+z=0.$$

Итак, найдена прямая

$$\begin{cases} 14x-3y+2z-8=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Ее каноническое уравнение: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+4}{12}=\dfrac{z-5}{-17}$.

35. Прямую зададим как пересечение двух плоскостей: плоскость, пересекающую прямую $\dfrac{x+5}{4}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-3}{-1}$ и параллельную прямой $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+3}{5}$:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-3 & z-3 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -32x-21y-23z-28=0,$$

и плоскость, пересекающую прямую $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+1}{-3}$ и параллельную прямой $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+3}{5}$:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-3 & z+1 \\ 5 & -3 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -36x-28y-32z-56=0.$$

Итак, найдена прямая

$$\begin{cases} 32x+21y+23z+28=0, \\ 9x+7y+8z+14=0. \end{cases}$$

Ее каноническое уравнение: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+4}{5}$.

36. Возможны два случая: указанные точки лежат по одну сторону от заданной плоскости или по разные стороны. В первом случае искомую плоскость найдем как плоскость, проходящую через заданную прямую и параллельную вектору $\overrightarrow{\mathcal{AB}}\,(2,-4,6)$ (или ему коллинеарному $(1,-2,3)$). Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = x-y-z-6=0.$$

Во втором случае искомую плоскость найдем как плоскость, проходящую через заданную прямую и точку $(4,2,2)$, делящую отрезок $\mathcal{AB}$ пополам. Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+5 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -3(7x+3y-z-32)=0.$$

37. 1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$;
2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$, $y=2$;
3) $y=2$, $z=3$

38. 1) $x-2y+4z-13=0$;
2) $3x+y+2z-5=0$;
3) $z=2$.

39. 1) $x+y+z-7=0$;
2) $3x+8y+23z-34=0$;
3) $-y-4z+5=0$.

40. Плоскость $3x-y+z-11=0$.

41. 1) $-5/3$;
2) 7.

42. 1) 1;
2) 2.

43. 1) $\sqrt{17}/7$;
2) $\sqrt{35}/7$;
3) $7/\sqrt{5}$.

44. 1) Прямые скрещиваются. Расстояние равно $2\sqrt{2}/3$.
2) Прямые скрещиваются. Расстояние равно $3\sqrt{14}/2$.
3) Прямые параллельны. Расстояние равно 1.

45.
1) $\arccos\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$; 2) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$;

3) $\pi/2$; 4) 0.

46.

1) $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{55}}$; 2) $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{255}}$;

3) $\pi/2$; 4) 0.

47.

1) $\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{45}}$;

2) $\pi/2$; 3) 0.

48. Уравнение высоты: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{5}$. Точка пересечения высоты с прямой $\mathcal{BC}$ имеет координаты $(0, 1, 2)$ и лежит внутри стороны $\mathcal{BC}$.

49. $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{-5}$, $(-1/3, 0, 5/3)$.