Глава 10

Теория систем линейных уравнений

10.1. Ранг матрицы

Пусть $A \in F^{m\times n}$. Рассмотрим столбцы $a_1, \ldots, a_n$ матрицы $A = (a_1, \ldots, a_n)$ как векторы пространства F^m, а строки $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m$ как векторы пространства F^n. Базу (соответственно ранг) системы $a_1, \ldots, a_n$ назовем *столбцовой базой* (соответственно *столбцовым рангом*) матрицы A. Базу (соответственно ранг) системы $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n$ назовем *строчечной базой* (соответственно *строчечным рангом*) матрицы A.

Утверждение 10.1. *Строчечный и столбцовый ранги матрицы простейшего вида совпадают.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что столбцы $j_1, \ldots, j_r$ матрицы простейшего вида (т. е. векторы $e_1, \ldots, e_r$) образуют столбцовую базу. С другой стороны, легко видеть, что строки $1, 2, \ldots, r$ образуют строчечную базу. Таким образом, строчечный и столбцовый ранги матрицы простейшего вида равны r. ∎

Замечание 10.2. Также легко видеть, что строчечный и столбцовый ранги ступенчатой матрицы (7.20) равны r.

Утверждение 10.3. *Пусть матрица $A' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ получена из матрицы $A = (a_1, \ldots, a_n)$ серией элементарных преобразований ее строк. Если $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ — столбцовая база матрицы A, то $a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_r}$ — столбцовая база матрицы A'.*

Доказательство. Докажем, что система $a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_r}$ линейно независима. Так как система $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ линейно независима, то система линейных уравнений (рассмотренная относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$)

$$\alpha_1 a_{j_1} + \ldots + \alpha_r a_{j_r} = 0 \tag{10.1}$$

имеет единственное (нулевое) решение. С матрицей этой системы осуществим те же преобразования, что и с матрицей A. Очевидно, что получим систему

$$\alpha'_1 a_{j_1} + \ldots + \alpha'_r a_{j_r} = 0.$$

Эта система эквивалентна (10.1), поэтому она тоже имеет единственное (нулевое) решение, что означает линейную независимость векторов $a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_r}$.

Теперь покажем, что для произвольного $j \in \{1, \ldots, n\}$ вектор a'_j линейно выражается через $a'_{j_1}, \ldots, a'_{j_r}$. Система

$$\alpha_1 a_{j_1} + \ldots + \alpha_r a_{j_r} = a_j$$

совместна, поэтому совместной будет система

$$\alpha_1 a'_{j_1} + \ldots + \alpha_r a'_{j_r} = a'_j,$$

полученная из исходной той же серией элементарных преобразований, с помощью которых мы из матрицы A получили A'. ∎

Следствие 10.4. *При элементарных преобразованиях строк столбцовый ранг матрицы не изменяется.*

Аналогично можно доказать

Следствие 10.5. *При элементарных преобразованиях столбцов строчечный ранг матрицы не изменяется.*

Пример 10.6. Найдем столбцовую базу матрицы и выразим остальные столбцы через базу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями со строками приведем матрицу к простейшему виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице базу образуют 1-й, 2-й и 4-й столбцы, следовательно, в матрице A также 1-й, 2-й и 4-й столбцы образуют базу. При этом 3-й столбец равен сумме 1-го и 2-го, а 5-й равен линейной комбинации 1-го и 2-го с коэффициентами 7, -3.

Утверждение 10.7. *Пусть матрица A' получена из матрицы A серией элементарных преобразований ее строк. Если $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m$ — строки матрицы A, $\widetilde{a}'_1, \ldots, \widetilde{a}'_m$ — строки матрицы A', то $L(\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m) = L(\widetilde{a}'_1, \ldots, \widetilde{a}'_m)$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, преобразование третьего типа. Легко видеть, что системы

$$\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_i, \ldots, \widetilde{a}_j, \ldots, \widetilde{a}_m;$$
$$\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_i + \alpha\widetilde{a}_j, \ldots, \widetilde{a}_j, \ldots, \widetilde{a}_m$$

эквивалентны. ∎

Следствие 10.8. *При элементарных преобразованиях строк строчечный ранг матрицы не изменяется.*

Аналогично можно доказать

Следствие 10.9. *При элементарных преобразованиях столбцов столбцовый ранг не изменяется.*

Теорема 10.10. *Строчечный и столбцовый ранги произвольной матрицы совпадают.*

Доказательство. Любую матрицу серией элементарных преобразований, сохраняющих столбцовый и строчечный ранги, можно привести к простейшему виду. Но для матрицы простейшего вида эти ранги равны, следовательно, они будут равны и для исходной матрицы. ∎

Столбцовый≡строчечный ранг назовем просто *рангом* матрицы и обозначим $\operatorname{rank} A$.

Замечание 10.11. Как мы уже видели, для нахождения столбцовой базы удобно применять элементарные преобразования строк матрицы, приводящие ее к простейшему (или ступенчатому) виду. Это позволяет также сразу найти коэффициенты линейных комбинаций, выражающих столбцы матрицы через базу. Аналогично, для нахождения строчечной базы удобно применять элементарные преобразования столбцов матрицы. Если же нужно определить только ранг матрицы, то можно применять любые элементарные преобразования строк и столбцов.

Пример 10.12. Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -75 & 50 & 25 \\ -39 & 119 & -80 & -39 \\ 18 & -57 & 39 & 18 \\ 103 & -305 & 203 & 99 \\ 97 & -293 & 191 & 117 \end{pmatrix}.$$

Ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на 3; из третьего столбца вычтем первый, умноженный на 2; из четвертого столбца вычтем первый. Получим:

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ -39 & 2 & -2 & 0 \\ 18 & -3 & 3 & 0 \\ 103 & 4 & -3 & -4 \\ 97 & -2 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

К третьему столбцу прибавим второй:

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ -39 & 2 & 0 & 0 \\ 18 & -3 & 0 & 0 \\ 103 & 4 & 1 & -4 \\ 97 & -2 & -5 & 20 \end{pmatrix}.$$

К четвертому столбцу прибавим третий, умноженный на 4:

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ -39 & 2 & 0 & 0 \\ 18 & -3 & 0 & 0 \\ 103 & 4 & 1 & 0 \\ 97 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 3.

Упражнение 10.13. Показать, как с помощью элементарных преобразований строк найти строчечную базу матрицы A.

Утверждение 10.14. *Пусть $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}$ — произвольная столбцовая база матрицы $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^{m \times n}$. Тогда элементарными преобразованиями над строками матрицу A можно привести к простейшему виду $A' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, такому, что $a'_{j_1} = e_1, a'_{j_2} = e_2, \ldots, a'_{j_r} = e_r$, где e_j — столбец, в котором j-я компонента равна 1, а остальные — нули.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $B = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r})$. Элементарными преобразованиями строк приведем ее к $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$. Чтобы получить требуемый вид A' матрицы A нужно над A провести те же элементарные преобразования. ∎

Следствие 10.15. *Пусть $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}$ — произвольная столбцовая база матрицы $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^{m \times n}$. Тогда переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ можно выбрать в качестве базисных переменных системы линейных уравнений с матрицей A.*

Теорема 10.16 (Кронекер–Капелли). *Система линейных уравнений с расширенной матрицей (A, b) совместна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A, b)$.

Доказательство. Рассмотрим два доказательства теоремы.
1-й способ. Элементарными преобразованиями строк матрицы (A, b) приведем ее к простейшему виду (A', b'). Из теоремы 7.19 следует, что система совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}(A', b') = \operatorname{rank} A'$, но $\operatorname{rank}(A', b') = \operatorname{rank}(A, b)$, $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A$, откуда следует доказываемое.
2-й способ. Систему уравнений можно записать в виде $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, где $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A. Очевидно, что совместность системы эквивалентна условию $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$. Докажем, что это эквивалентно условию $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\}$.

Если $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$, то $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\}$.

Пусть теперь $\operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{rank}\{a_1, \ldots, a_n, b\}$. Если $a_{j_1}, \ldots a_{j_r}$ — база системы $a_1, \ldots, a_n$, то $\operatorname{rank}\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}\} = \operatorname{rank}\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}, b\}$, поэтому система $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}, b$ линейно зависима, и, следовательно, найдется вектор в этой системе, линейно выражающийся через остальные. Так как система $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ линейно независима, то этим вектором может быть только b, т. е. $b \in L(a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}) = L(a_1, \ldots, a_n)$. ∎

Следствие 10.17. *Число связанных переменных совместной системы линейных уравнений равно рангу матрицы и, следовательно, не зависит от способа приведения расширенной матрицы системы к простейшему виду элементарными преобразованиями строк.*

10.2. Пространство решений системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений с нулевой правой частью ($b = 0$) называется *однородной*. Исследуем множество $M(A, 0)$.

Теорема 10.18. *Пусть $A \in F^{m \times n}$,* $\operatorname{rank} A = r$. *Множество $M(A, 0)$ решений системы однородных уравнений с матрицей A есть линейное подпространство в F^n размерности $n - r$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из формул (7.19), описывающих множество $M(A, 0)$. ∎

Базис пространства $M(A, 0)$ называется *фундаментальной системой решений* системы линейных однородных уравнений.

Следствие 10.19. *Любая линейно независимая система из $n-r$ частных решений системы линейных однородных уравнений составляет ее фундаментальную систему решений.*

10.3. Множество решений системы линейных уравнений общего вида

Теорема 10.20. *Пусть $A \in F^{m\times n}$, $b \in F^m$, $\operatorname{rank} A = r$. Множество $M(A, b)$ решений совместной системы уравнений с расширенной матрицей (A, b) есть линейное многообразие в F^n размерности $n-r$. В частности, если система совместна, то она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $n = r$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из формул (7.19), описывающих множество $M(A, b)$. ∎

Теорема 10.21. *Пусть $A \in F^{m\times n}$, $b \in F^m$, $x_0 \in M(A, 0)$, тогда*

$$M(A, b) = x_0 + M(A, 0). \tag{10.2}$$

Таким образом, несущим подпространством множества решений системы линейных уравнений является линейное пространство решений соответствующей однородной системы.

Доказательство. Утверждение сразу следует из формул (7.19). ∎

Замечание 10.22. Можно дать следующую словесную формулировку теоремы: общее решение $M(A, b)$ неоднородной системы уравнений есть ее частное решение x_0 плюс общее решение $M(A, 0)$ соответствующей однородной системы.

Утверждение 10.23. *Для того, чтобы линейное уравнение являлось следствием совместной линейной системы необходимо и достаточно, чтобы оно являлось линейной комбинацией уравнений этой системы.*

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Для доказательства необходимости заметим, что добавление уравнения-следствия к совместной линейной системе не должно менять ранга этой системы, откуда получаем требуемое. ∎

10.4. Описание подпространства и линейного многообразия арифметического пространства в виде множества решений системы линейных уравнений

Ранее мы видели, что множество решений однородной (соответственно неоднородной) системы линейных уравнений есть линейное подпространство (соответственно многообразие) арифметического пространства. В этом разделе мы покажем обратное: любое линейное подпространство (соответственно многообразие) арифметического пространства является множеством решений некоторой однородной (соответственно неоднородной) системы линейных уравнений.

Теорема 10.24. *Для любого подпространства L арифметического пространства F^n существует матрица $A \in F^{m\times n}$, такая, что $L = M(A, 0)$.*

Доказательство. Пусть $L = L(b_1, \ldots, b_s)$, где $b_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})^\top$ $(i = 1, \ldots, s)$. Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = 0; \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \ldots + b_{sn}x_n = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

Пусть векторы

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для (10.3). Покажем, что матрица $A = (a_{ij})$ — искомая. Иными словами, покажем, что множество решений системы (7.7) есть заданное линейное подпространство. Действительно, этой системе удовлетворяют координаты каждого вектора $b_1, \ldots, b_s$, следовательно, этой системе удовлетворяют координаты произвольного вектора из L. Таким образом, $L \subseteq M(A, 0)$. С другой стороны, ранг системы (10.3) равен размерности пространства L, поэтому размерность m пространства решений системы (10.3) равна $m = n - \dim L$. Откуда

$$\dim M(A, 0) = n - m = n - (n - \dim L) = \dim L.$$

Итак, $L \subseteq M(A, 0)$ и $\dim M(A, 0) = \dim L$. Следовательно, $L = M(A, 0)$. ∎

Пример 10.25. Пусть $L = L(b_1, b_2)$, где

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с L.
1-й способ. Воспользуемся методом, описанным в доказательстве теоремы 10.24. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3+x_4} = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему ее решений составляют, например, векторы

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

поэтому в качестве искомой системы можно взять

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3-x_4} = 0, \\ \phantom{x_1-x_2+{}} x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{10.4}$$

2-й способ. Рассмотрим матрицу B, составленную из столбцов b_1, b_2, и матрицу $\widetilde{B}$, составленную из столбцов b_1, b_2, x. Для того, чтобы $x \in L(b_1, b_2)$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} \widetilde{B}$. Элементарными преобразованиями строк матрицы B приведем ее к ступенчатому виду. Такие же преобразования проделаем с матрицей $\widetilde{B}$:

$$\widetilde{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_3 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы без последнего столбца равен 2. Для того, чтобы ранг всей матрицы был также равен 2 необходимо и достаточно, чтобы $x_2 - x_1 = 0$ и $x_4 - x_3$. Эти равенства и составляют искомую систему.

Теорема 10.26. *Для любого линейного многообразия $b_0 + L$ арифметического пространства F^n существуют матрица $A \in F^{m\times n}$ и вектор $b \in F^m$, такие, что $b_0 + L = M(A, b)$.*

Доказательство. Для подпространства L построим однородную систему линейных уравнений с матрицей A, такую, что $L = M(A, 0)$. Положим $b = Ab_0$. Из теоремы 10.20 следует, что $b_0 \in M(A, b)$. ∎

Пример 10.27. Пусть $L = L(b_1, b_2)$, где L — такое же, как в примере 10.25, и

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с $b_0 + L$.

Подставляя компоненты вектора b_0 в левую часть системы (10.4) получим числа 1, 0, следовательно, множество решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3-x_4} = 1, \\ \phantom{x_1-x_2+{}} x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

совпадает с $b_0 + L$.

Описание линейного многообразия с помощью системы линейных уравнений удобно для нахождении пересечения линейных многообразий.

Пример 10.28. Найдем пересечение линейных многообразий $a_0 + L(a_1, a_2)$ и $b_0 + L(b_1, b_2)$, где

$$a_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Находим системы линейных уравнений, определяющих каждое из многообразий:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2, \\ -2x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Пересечение многообразий определяет система, составленная из этих систем:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 2, \\ -2x_2 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть одномерное линейное многообразие $c_0 + L(c_1)$, где

$$c_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$